
CALCUL DE RISQUES DE PREMIERE ET DE SECONDE ESPECES A TRAVERS UN EXEMPLE

Yves DUCEL, Damien FOURNY,
Maxime FOURNY, Bruno SAUSSEREAU¹
Irem de Besançon

La prise de décision relativement à une proportion a été introduite au lycée dès la Seconde par les programmes de 2009. Il s'agit d'établir une règle de décision permettant, à partir de l'observation d'un échantillon de taille n , de décider entre deux hypothèses H_0 et H_1 laquelle doit être retenue. Cette règle de décision fait appel à la notion d'intervalle de fluctuation.

Une première formulation pour ce type d'intervalle est donnée en Seconde pour des conditions de validité (conditions dites «des grandes binomiales») portant sur la proportion p et la taille n de l'échantillon observé à partir duquel est prise la décision. Cette démarche est ensuite reprise en classe de Première et en classe de Terminale en introduisant d'autres constructions d'intervalles de fluctuation. Ainsi, bien que le raisonnement à la base de la décision soit inchangé, les intervalles de fluctuation sus-

ceptibles d'être mis en œuvre, et les conditions de leur validité, diffèrent d'une classe à l'autre.

Ces différentes définitions sont souvent source d'interrogation de la part des enseignants peu habitués à la problématique statistique qui, face à une situation donnée, se demandent quel intervalle de fluctuation utiliser et surtout sur quels critères objectifs le choix doit être fait : pourquoi choisir l'un au détriment d'un autre lorsque les conditions de validité s'y prêtent ?

Pour apporter des éléments de réponse à cette question, il est nécessaire que l'enseignant ait

¹ Yves DUCEL, Bruno SAUSSEREAU (animateurs Irem, Laboratoire mathématique de Besançon, UFR Sciences et techniques, Université de Franche-Comté); Damien FOURNY (animateur Irem & formateur DIFOR, lycée Follereau, Belfort); Maxime FOURNY (animateur Irem & formateur DIFOR, lycée le Grand Chênois, Montbéliard).

suffisamment de recul par rapport à la prise de décision, et qu'il connaisse les notions de risques de première et de seconde espèces qui, bien que hors programmes des lycées, sont fondamentales dans la discussion de l'efficacité de la prise de décision. Cet article se propose de préciser ces notions à partir d'un exemple. Le propos vise à faire comprendre comment ces notions de risques interviennent, et pourquoi elles sont indispensables, pour bien cerner la problématique de la démarche de prise de décision vue au lycée. L'enseignant aura ainsi un cadre mathématique précis qui lui permettra de mieux maîtriser l'implicite de certaines questions des élèves sur cette problématique et de mieux adapter sa réponse à leur niveau.

Nous allons donc illustrer ces notions de risques de première et de seconde espèces en prenant appui sur l'expérience que Buffon relate dans son *Essai d'arithmétique morale* (1777, [1]) : Buffon fait lancer à un enfant 4040 fois une pièce de monnaie. Il obtient 2 048 fois «pile». La question est de savoir si la pièce utilisée est équilibrée, c'est-à-dire de décider si la probabilité d'obtenir «pile» avec cette pièce est égale à 0,5 (hypothèse H_0), ou si elle est déséquilibrée (hypothèse H_1).

Comme nous l'avons vu dans notre article [4] la prise de décision fait appel à des intervalles de fluctuation différents en fonction des conditions expérimentales de l'échantillonnage. En Seconde et en Terminale, l'intervalle de fluctuation utilisé suppose que n et p vérifient la condition des grandes binomiales, alors qu'en Première, l'intervalle de fluctuation est construit pour toutes valeurs de n et de p . Nous avons choisi l'exemple de la pièce de Buffon car cette situation vérifie la condition des grandes binomiales, ce qui permet d'utiliser les intervalles de fluctuation construits dans chacun des trois niveaux du lycée. Les risques sont alors calculés dans chaque cas, d'abord

avec la loi binomiale (calculs exacts), puis avec l'approximation gaussienne (calculs approchés). Notons que, à la différence des calculs utilisant l'approximation gaussienne, les calculs (exacts) avec la loi binomiale sont également valables pour les situations ne vérifiant pas les conditions des grandes binomiales, comme dans l'affaire de Woburn (cf. [4]) où l'approximation gaussienne n'étant pas valide, seul l'intervalle de fluctuation exact construit en Première à partir de la loi binomiale est pertinent.

En annexe de cet article (cf. paragraphe 4), nous développerons, également pour le lancer de pièce, un cadre mathématique de modélisation statistique. La prise de décision suppose ce cadre formel qui, parce qu'il dépasse largement le niveau du lycée, est laissé implicite dans la démarche et les raisonnements utilisés. Cependant, il peut être intéressant de l'explicitier, au moins une fois, pour que l'enseignant intéressé puisse en avoir connaissance. A cet effet, nous partirons toujours de notre exemple pour illustrer dans ce cas précis la mise en place des cadres statistique et probabiliste tels qu'ils sont abordés, souvent de façon très abstraite ou peu détaillée, dans les manuels universitaires de statistique inférentielle.

Pour une approche pédagogique de la notion d'expérience aléatoire, le lecteur pourra se reporter à l'article [3], pour les aspects plus mathématiques du formalisme probabiliste à [9] ou [2].

1. — La prise de décision

Convention : Comme la valeur de n est pratiquement toujours fixée à $n = 4040$, dans la suite de cet article nous noterons (sauf exception si nous parlons de convergence) simplement F (au lieu de F_n) la fréquence de «pile» dans n lancers de la pièce. Pour les mêmes raisons, nous

noterons S (au lieu de S_n), le nombre de «pile» dans n lancers de la pièce.

Compte tenu de cette convention, la notation indexée $P_p(S = k)$, où k est un entier naturel, désigne alors la probabilité qu'il y ait exactement k «pile» dans n lancers de la pièce de Buffon, si la probabilité d'avoir «pile» avec cette pièce vaut p (on exprime souvent cela en disant que l'état de la nature pour la pièce de Buffon est p) ; et la notation $P_p(F \in [a, b])$ désigne la probabilité que la fréquence de «pile» dans n lancers de la pièce de Buffon soit comprise entre les réels a et b (avec $a < b$), si la probabilité d'avoir «pile» avec cette pièce vaut p .

Nous allons, dans un premier temps, revenir sur la démarche de prise de décision avec les différentes définitions des intervalles de fluctuation introduits au lycée préconisée par les derniers programmes. Pour une étude plus développée sur ces intervalles de fluctuation et une discussion pédagogique sur leur introduction en classe, on pourra se reporter à [4], [5], [6] et [7].

1.1 La base logique du raisonnement mathématique en statistique

Le raisonnement sous-jacent à la démarche de la prise de décision est de nature statistique. Il se démarque du raisonnement logique de nature déterministe mis en œuvre en mathématique.

Nous allons schématiser ces deux types de raisonnement pour faire ressortir leur différence mais aussi leur similitude.

Le raisonnement mathématique utilisé, par exemple, en analyse, algèbre ou géométrie s'appuie sur une logique déterministe qu'on peut schématiser de la façon suivante : supposons que le fait qu'une hypothèse H_0 soit vraie

implique d'observer un certain événement A avec certitude. Alors, quand on n'observe pas l'événement A , on rejette l'hypothèse H_0 .

Dans le raisonnement mathématique utilisé en statistique, l'implication va porter sur des événements dont la réalisation n'est pas totalement certaine. Le raisonnement mathématique utilisé en statistique s'appuie alors sur une logique non déterministe qu'on peut schématiser de la façon suivante : supposons que le fait qu'une hypothèse H_0 soit vraie implique d'observer un événement A , non pas avec certitude, mais seulement dans 95% des cas. On peut alors avoir deux attitudes :

- Soit on raisonne avec la logique classique déterministe. Dans ce cas quand on n'observe pas l'événement A , on ne peut pas conclure sur H_0 . Ce raisonnement n'est pas entaché d'erreur, mais il ne permet pas de décider quand on n'observe pas l'événement A .
- Soit, on prend en compte le phénomène statistique et la quasi-certitude (par exemple 95%) de l'événement pour décider, quand même, de rejeter l'hypothèse H_0 quand on n'observe pas l'événement A . Ce raisonnement, quant à lui, est susceptible d'induire en erreur dans certain cas, mais il permet de prendre une décision. C'est cette démarche, qu'on va formaliser sur le plan mathématique, qu'on mettra en œuvre dans la *décision statistique*.

Remarquons qu'en décision statistique, avec le raisonnement ci-dessus, on a dans notre exemple 5% de chances de rejeter à tort l'hypothèse H_0 . Par la nature de ce raisonnement, on peut donc être amené à se tromper en prenant la décision de rejeter H_0 , mais cette erreur est très peu probable, ici égale à 5%, ce qui prouve statistiquement l'intérêt pratique de la démarche mathématique de la prise de décision.

La discussion sur les erreurs inhérentes à la démarche de la prise de décision sera développée dans le paragraphe 2.

1.2 Application au lancer de la pièce

Décider si la pièce de Buffon est équilibrée, revient à décider l'hypothèse nulle « La pièce de Buffon est équilibrée », qu'on notera H_0 $p = 0,5$, contre l'hypothèse alternative « La pièce de Buffon n'est pas équilibrée », qu'on notera H_1 $p \neq 0,5$, ce qu'on écrira en posant $p_0 = 0,5$ la valeur de référence de l'équilibre :

$$H_0) p = p_0 ,$$

$$H_1) p \neq p_0 .$$

Pour trancher entre ces deux hypothèses, on va utiliser la démarche de prise de décision qui fait intervenir la notion d'intervalle de fluctuation. On a le choix entre les trois expressions au programme du lycée, qu'on peut utiliser en fonction des conditions de réalisation de l'observation de l'échantillon prélevé portant sur n et p . Nous raisonnerons dans tout cet article avec des intervalles de fluctuation (en abrégé par la suite : IF) définis avec un seuil de 95%. Le complément à 100% du seuil s'appelle le niveau de signification de la prise de décision, qui est donc égal à 5% dans cet article. Les expres-

sions des trois intervalles de fluctuation $IF(p)$ dont on dispose au lycée, formulés pour la statistique F (fréquence de «pile»), sont rappelées et rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Dans le cas qui nous intéresse, le raisonnement mathématique utilisé en statistique souligné précédemment devient :

Si la pièce est équilibrée (hypothèse H_0), on sait que l'événement A : « La fréquence de «pile» dans l'observation de $n = 4040$ lancers de la pièce est dans un intervalle $IF(p_0)$ » a une probabilité d'environ 95%. Alors, si cet événement n'est pas réalisé dans l'observation des n lancers qui nous intéressent, on décidera que la pièce n'est pas équilibrée. Dans le cas contraire, on décidera que la pièce est équilibrée.

Ce qui permet d'énoncer la règle de décision suivante qui fait intervenir un intervalle de fluctuation $IF(p_0)$ calculé avec la valeur $p_0 = 0,5$ et $n = 4040$. Énonçons cette règle de décision avec la fréquence :

Pour décider si $p = 0,5$, on observe n lancers de la pièce et on détermine la fréquence observée f de «pile» dans ces n lancers :

- si $f \in IF(p_0)$, on décide que $p = p_0$,
- si $f \notin IF(p_0)$, on décide que $p \neq p_0$.

Classe	Conditions de validité	Expression de l'IF
Seconde	$n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$	$IF(p) = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$
Première	n et p quelconques	$IF(p) = [a/n ; b/n]$
Terminale	$n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$	$IF(p) = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$

CALCUL DE RISQUES DE PREMIÈRE
ET DE SECONDE ESPÈCES ...

Compte tenu des valeurs de $n = 4040$ et de $p_0 = 0,5$, les conditions de validité permettent d'utiliser *a priori* indifféremment, les IF de Seconde, de Première ou de Terminale, dont voici les valeurs numériques :

Classe	IF(0,5) pour fréquence	IF(0,5) pour effectif
Seconde	[0,4842 ; 0,5158]	[1957 ; 2083]
Première	[0,4847 ; 0,5154]	[1958 ; 2082]
Terminale	[0,4845 ; 0,5155]	[1958 ; 2082]

1.3 Décision avec l'IF de Terminale

L'IF asymptotique de Terminale est déterminé en prenant pour valeur de la proportion p , la valeur p_0 figurant dans l'hypothèse nulle $p = p_0$. Si on raisonne avec un niveau de signification $\alpha = 5\%$, on sait que l'IF est donné par la formule suivante :

$$IF(p_0) = \left[p_0 - u \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} ; p_0 + u \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} \right]$$

où u désigne l'unique réel $u > 0$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{-t^2/2} dt = 0,95.$$

On sait que $u \approx 1,96$, d'où :

$$IF(0,5) = \left[0,5 - 1,96 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{4040}} ; 0,5 + 1,96 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{4040}} \right] \approx [0,4845 ; 0,5155].$$

La variable de décision est ici la fréquence empirique F dont on sait que sa loi est approximativement la loi normale d'espérance p_0 et de variance $\frac{p_0(1-p_0)}{n}$, avec $p_0 = 0,5$ et $n = 4040$.

L'application de la règle de décision conduit à vérifier si la fréquence observée, ici $f \approx 0,5069$, appartient à l'intervalle $[0,4845 ; 0,5155]$; ce qui est le cas ici. On décide donc que $p = 0,5$, c'est-à-dire qu'on considérera la pièce de Buffon équilibrée.

On peut illustrer graphiquement cette règle de décision en représentant le diagramme en bâtons (relativement à P_{p_0}) de la variable discrète F , avec en abscisses toutes les valeurs possibles, k/n avec $k = 0, 1, 2, \dots, n$, pour la fréquence, et en ordonnées les valeurs de la probabilité correspondante $P_{p_0}(F = k/n)$ d'observer cette valeur.

Comme nous sommes dans les conditions de grandes binomiales, nous pouvons vérifier sur la figure que l'enveloppe graphique de ce diagramme en bâtons est la partie au-dessus de l'intervalle $[0, 1]$ de la courbe en cloche de Gauss représentative de la densité de probabilité de l'approximation gaussienne de la loi exacte de F (relativement à P_{p_0}), c'est-à-dire de la densité de la loi normale d'espérance $p_0 = 0,5$ et de variance $\frac{p_0(1-p_0)}{n} = \frac{0,5(1-0,5)}{4040} \approx 0,0000618$, comme nous l'avons rappelé dans le sous-paragraphe 4.4.

Les bornes de l'intervalle de fluctuation $IF(p_0) = [f_1, f_2]$ subdivisent l'intervalle $[0, 1]$ de l'axe des abscisses suivant les trois sous-segments $[0, f_1[$, $[f_1, f_2]$ et $]f_2, 1]$.

Le segment central $[f_1, f_2]$ est l'intervalle de fluctuation qui représente la zone de non-rejet de l'hypothèse H_0 , les deux autres segments $[0, f_1[$ et $]f_2, 1]$ représentent la zone de rejet de l'hypothèse H_0 .

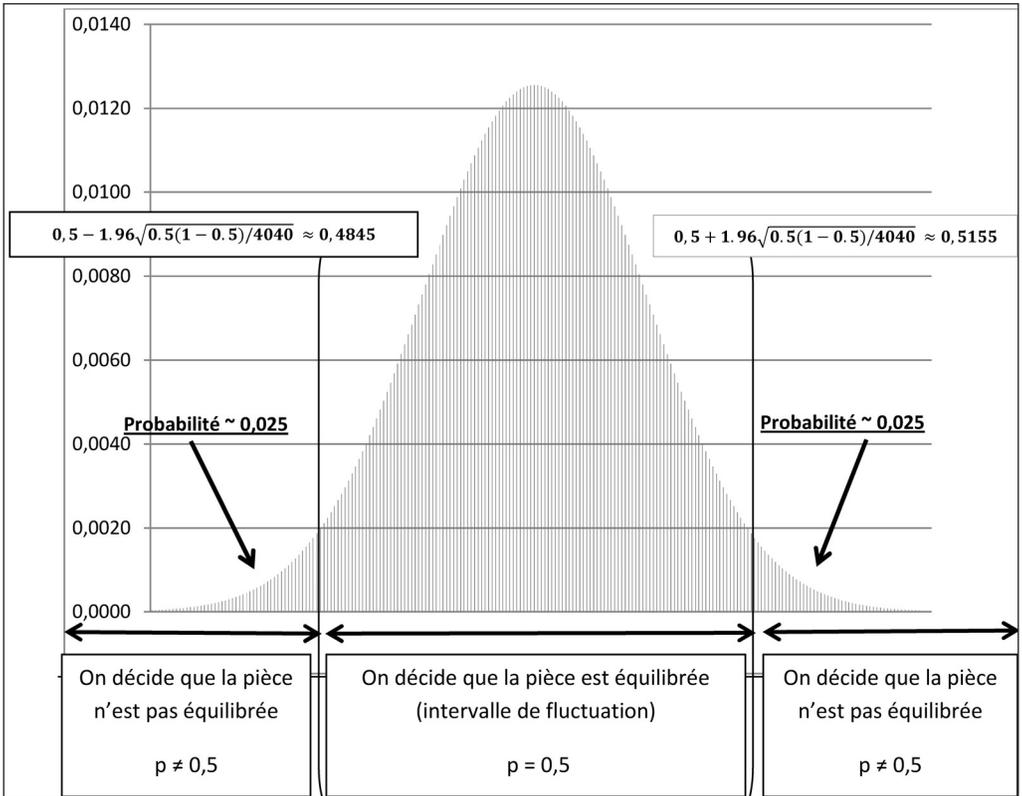


Illustration graphique de la règle de décision avec l'IF-Terminale

1.4 Décision avec l'IF de Seconde

Nous aurions pu effectuer cette prise de décision en raisonnant avec l'IF de Seconde, ce qui est possible car les conditions de validité $n = 4040 \geq 30$ et $0,2 \leq p_0 = 0,5 \leq 0,8$ sont bien vérifiées.

La variable de décision est ici la fréquence empirique F . L'application de la règle de décision conduit à déterminer l'IF-Seconde

$$IF(p_0) = [p_0 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}] =$$

$$[0,5 - 1/\sqrt{4040} ; 0,5 + 1/\sqrt{4040}] \approx$$

$$[0,4842 ; 0,5158],$$

et à vérifier si la fréquence observée, ici $f \approx 0,5069$, appartient à cet intervalle ; ce qui est le cas ici. On décide donc que $p = 0,5$, c'est-à-dire qu'on considérera la pièce de Buffon équilibrée.

Comme pour la règle de décision avec l'IF de Terminale, on peut illustrer cette règle de décision par la figure de la page ci-contre.

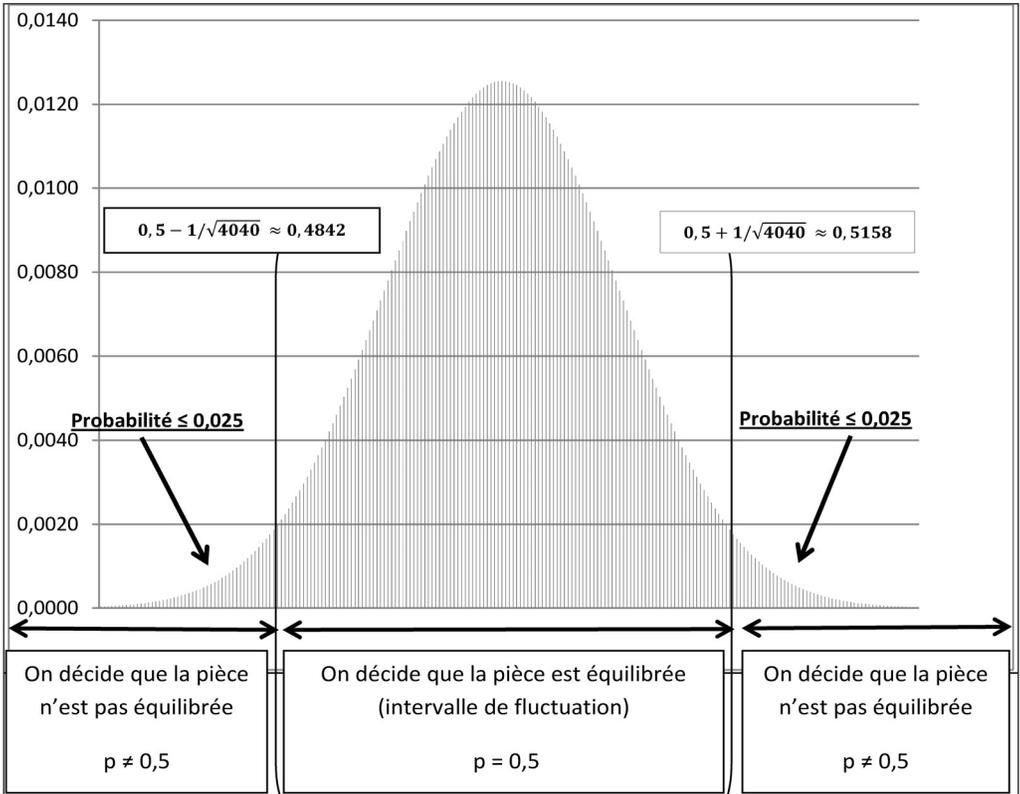


Illustration graphique de la règle de décision avec l'IF-Seconde

1.5 Décision avec l'IF de Première

Si nous souhaitons raisonner avec la prise de décision utilisant l'intervalle de fluctuation de Première, il est plus judicieux de raisonner avec la variable $S = nF$ qui représente le nombre de «pile» dans $n = 4040$ lancers de la pièce de Buffon. On sait, d'après le programme de Première, que cette variable aléatoire suit (relativement à P_p) la loi binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion p , où p désigne la probabilité (inconnue) d'avoir «pile» avec cette pièce.

Dans le cas de la prise de décision avec l'IF de Première, nous n'avons aucune condition de validité à vérifier portant sur n et p . Nous prendrons comme variable de décision la variable S_p de loi binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion $p = p_0$.

L'intervalle de fluctuation de Première est alors déterminé en prenant le plus grand entier a tel que $P_{p_0}(S < a) \leq 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P_{p_0}(S > b) \leq 0,025$. On a alors $IF(p_0) = [a, b]$ et, par suite,

$$P_{p_0}[S \in IF(p_0)] \geq 0,95.$$

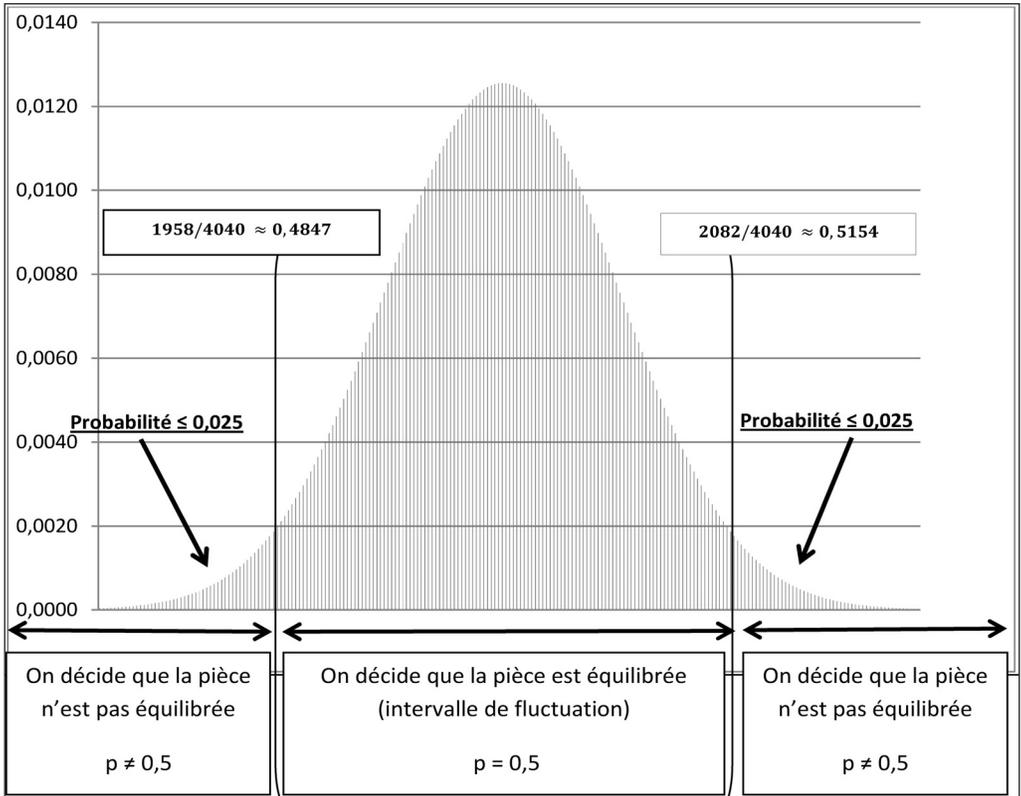


Illustration graphique de la règle de décision avec l'IF-Première

En utilisant un tableur et sa fonction LOI-BINOMIALE, on trouve que $a = 1958$ et $b = 2082$. Comme le nombre de «pile» observé dans les n lancers de Buffon est égal à 2048 qui appartient à l'intervalle de fluctuation exact $IF(0,5) = [1958 ; 2082]$, on décide donc que $p = 0,5$, c'est-à-dire qu'on considérera la pièce de Buffon équilibrée.

Si nous prenons comme variable de décision la fréquence F , alors l'intervalle de fluctuation correspondant est :

$$IF(0,5) = [a/n, b/n] =$$

$$= [1958/4040 ; 2082/4040] \\ \approx [0,4847 ; 0,5154] .$$

Comme pour la règle de décision avec l'IF de Terminale, on peut illustrer cette règle de décision par la figure ci-dessus.

2. — Les risques de première et de seconde espèces

Décider entre deux hypothèses complémentaires à partir de l'observation d'un échan-

tillon revient à opposer l'état de nature réel (ici équilibre réel de la pièce) à la décision sur celui-ci. Cette opposition «état de nature réel/décision prise» conduit :

- soit à prendre une bonne décision lorsque la décision prise est conforme à l'état de nature réel;
- soit à commettre une erreur lorsque la décision prise est contraire à l'état de nature réel.

On peut résumer dans le tableau ci-dessous les quatre différents cas de figure susceptibles de se présenter dans une prise de décision entre les deux hypothèses $p = 0,5$ et $p \neq 0,5$...

Le risque de première espèce, noté α , est la probabilité de l'erreur I, c'est-à-dire la probabilité de prendre la décision $p \neq p_0$ alors qu'en réalité $p = p_0$. On a donc :

$$\alpha = P_{p_0}[F \notin IF(p_0)].$$

En général l'usage en statistique inférentielle est de maîtriser en priorité ce risque. Pratiquement on se fixe la valeur du niveau de signification (souvent 5% qui est donc lui-même une donnée du problème), et on impose au risque de première espèce α de ne pas dépasser ce seuil.

Le risque de seconde espèce est la probabilité de l'erreur II, c'est-à-dire la probabilité, notée $\beta(p_1)$, de prendre la décision $p = p_0$ alors qu'en réalité $p \neq p_0$, avec $p = p_1$, où p_1 est une certaine valeur différente de p_0 .

Le calcul de ce risque nécessite d'avoir des informations sur l'hypothèse alternative plus précises que $p \neq p_0$. Dans la négative, on

peut alors faire le calcul de $\beta(p)$ pour toute valeur de $p \in]0,1[\setminus \{p_0\}$. On a donc, pour tout $p \in]0,1[\setminus \{p_0\}$,

$$\beta(p) = P_p[F \in IF(p_0)].$$

Plus le risque de seconde espèce est faible, meilleure est la prise de décision. On dit que le risque de seconde espèce nous informe sur la puissance de la prise de décision. Par définition, la *puissance d'une prise de décision entre l'hypothèse nulle $p = p_0$ et l'hypothèse alternative $p = p_1$* est le réel, noté $\eta(p_1)$, défini par $\eta(p_1) = 1 - \beta(p_1)$. Le calcul de la puissance nous permettra ainsi de comparer les différentes façons de prendre une décision lorsque plusieurs choix de l'intervalle de fluctuation sont possibles.

Bien que l'expression $\beta(p) = P_p[F \in IF(p_0)]$ ait un sens pour $p = p_0$, où on retrouve la valeur $P_{p_0}[F \in IF(p_0)]$ du risque α de première espèce, la définition du risque de seconde espèce n'a de signification, quant à elle, que pour p différent de p_0 .

En général, dans la pratique de la prise de décision, le statisticien cherche en priorité à maîtriser le risque de première espèce α . Une fois la valeur de α contrôlée, le statisticien va rechercher des protocoles de décision qui minimisent le risque de seconde espèce. Cette recherche porte sur la construction d'intervalles de fluctuation et l'introduction de variables aléatoires pour les déterminer qui, sans que α dépasse le niveau de signification, permettent de minimiser le risque de seconde espèce β . Cependant, plus on voudra minimiser le risque de première

	On décide $p = 0,5$	On décide $p \neq 0,5$
La pièce est réellement équilibrée	Bonne décision	Erreur I
La pièce est réellement déséquilibrée	Erreur II	Bonne décision

espèce, plus le risque de seconde espèce aura tendance à être mauvais. La prise de décision rend obligatoire un compromis pour contenir les deux risques dans des valeurs acceptables. C'est pour cette raison qu'on prend souvent comme niveau de signification 5%, valeur qui permet d'obtenir des risques de seconde espèce acceptables suivant la taille de l'échantillon. En outre, on verra que plus les valeurs p_1 et p_0 intervenant dans les hypothèses sont proches, plus il sera nécessaire d'avoir la taille d'échantillon élevée.

2.1 Calculs avec l'IF de Terminale

Le risque de première espèce est donc

$$P_{0,5}(F \notin [0,4845 ; 0,5155]) =$$

$$P_{0,5}(S \notin [1958 ; 2082]) =$$

$$P_{0,5}(S < 1958) + P_{0,5}(S > 2082),$$

où les calculs de probabilité sont conduits sous l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée, ce qui revient à considérer que le nombre de «pile» dans n lancers est exactement une variable binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion $p_0 = 0,5$, autrement dit à utiliser dans les calculs la variable aléatoire $S_{0,5}$. La lecture de la loi binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion $0,5$ à l'aide d'un tableur permet d'obtenir le risque de première espèce :

$$\alpha = P_{0,5}(S \notin [1958 ; 2082]) =$$

$$P_{0,5}(S < 1958) + (1 - P_{0,5}(S \leq 2082)) =$$

$$0,0246 + (1 - 0,9754) = 0,0492$$

soit 4,92%.

Remarque : Ici le risque de première espèce α est proche du niveau de signification de 5% fixé pour prendre la décision. On sait par définition de l'intervalle de fluctuation asymptotique que

$$\mathbb{P}_{p_0} \left(p_0 - u \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p_0 + u \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \mathbb{P}_{p_0} (-u \leq Z_{n,p_0} \leq u)$$

converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{-t^2/2} dt = 0,95 \text{ si on prend } u \approx 1,96.$$

Comme $n = 4040$ est grand, on en déduit que le risque de première espèce est

$$\alpha = P_{0,5}(F_n \notin [0,4845 ; 0,5155]) =$$

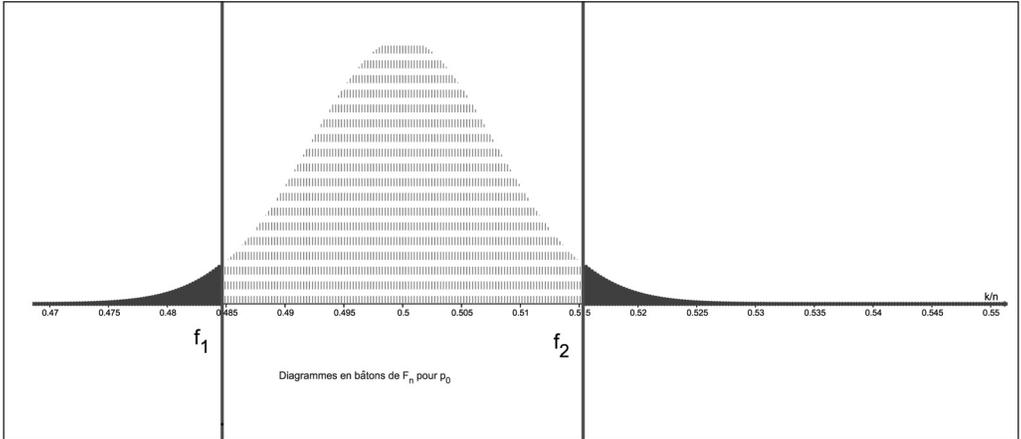
$$P_{0,5}(Z_{n,0,5} \notin [-1,96 ; 1,96]) \approx 0,05 .$$

Dans cette prise de décision, le risque de première espèce α est asymptotiquement égal au niveau de signification de 5% fixé pour prendre la décision.

Le risque de première espèce est représenté géométriquement par l'aire située sous la courbe de Gauss au-dessus des intervalles $[0, f_1[$ et $]f_2, 1]$, où $[f_1, f_2]$ désigne l'intervalle de fluctuation, comme on peut le voir sur la figure ci-contre.

Le risque de seconde espèce revient à considérer ce qui se passe quand la pièce, en réalité, n'est pas équilibrée c'est-à-dire quand l'hypothèse alternative est en réalité vérifiée (mais on ne le sait jamais). Pour faire le calcul du risque de deuxième espèce il est donc nécessaire de faire des hypothèses sur l'éventuel déséquilibre de la pièce. Par exemple on va supposer qu'en réalité la probabilité de tomber sur «pile», n'est pas $p_0 = 0,5$, mais plutôt $p_1 = 0,52$.

Dans ce cas là, on prendra une décision erronée si on décide que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire si la fréquence observée dans l'échantillon est dans l'intervalle de fluctuation $[0,4845 ; 0,5155]$ calculé avec p_0 . Le

CALCUL DE RISQUES DE PREMIERE
 ET DE SECONDE ESPECES ...


Risque de première espèce avec l'IF de Terminale

risque de seconde espèce pour $p_1 = 0,52$, qu'on notera $\beta(0,52)$, est donc égal à la probabilité $P_{0,52}(F \in [0,4845 ; 0,5155])$.

On a alors

$$\begin{aligned}\beta(0,52) &= P_{0,52}(F \in [0,4845 ; 0,5155]) \\ &= P_{0,52}(S \in [1958 ; 2082]).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Soit } \beta(0,52) &= P_{0,52}(S \leq 2082) - P_{0,52}(S \leq 1957) \\ &= 0,2822 - 0 = 0,2822.\end{aligned}$$

D'où un risque de seconde espèce, de 28,22%.

Remarque : Un calcul par l'approximation normale de la loi de F (relativement à $P_{0,52}$) donne 28,43% en introduisant la variable aléatoire $Z_{0,52} = \frac{F-0,52}{\sqrt{\frac{0,52(1-0,52)}{4040}}}$ qui est approximativement normale centrée réduite. En effet,

$$\beta(0,52) = P_{0,52}(F \in [0,4845 ; 0,5155])$$

$$\begin{aligned}&= P_{0,52}\left(Z_{0,52} \in \left[\frac{0,4845-0,52}{\sqrt{\frac{0,52(1-0,52)}{4040}}}; \frac{0,5155-0,52}{\sqrt{\frac{0,52(1-0,52)}{4040}}}\right]\right) \\ &= P_{0,52}(Z_{0,52} \in [-4,51 ; -0,57]) \\ &\approx P_{0,52}(Z_{0,52} \leq 4,51) - P_{0,52}(Z_{0,52} \leq 0,57) \\ &\approx 1 - 0,7157 = 0,2843.\end{aligned}$$

Soit un risque de seconde espèce de 28,43%.

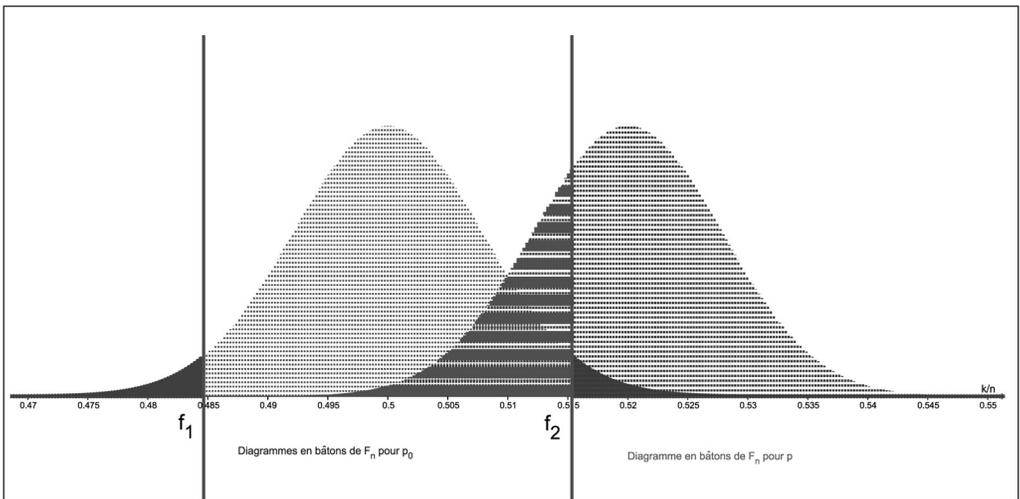
On peut illustrer graphiquement le risque de seconde espèce pour l'hypothèse $H_1) p = p_1$, par exemple pour le cas $p_1 = 0,52$, en représentant sur un même graphique le diagramme en bâtons (relativement à P_{p_0}) de la variable discrète F et celui de la variable discrète F (relativement à P_{p_1}), avec toujours en abscisses toutes les valeurs possibles, k/n avec $k = 0, 1, 2, \dots, n$, pour la fréquence, et en ordonnées, pour le diagramme de F (relativement à P_{p_0}) les valeurs de la probabilité correspondante

$P_{p_0}(F = k/n)$ d'observer cette valeur et, pour le diagramme de F (relativement à P_{p_1}), les valeurs de la probabilité correspondante $P_{p_1}(F = k/n)$ d'observer cette valeur. Comme nous sommes dans les conditions de grandes binomiales, nous pouvons encore vérifier sur la figure que l'enveloppe graphique du diagramme en bâtons de F (relativement à P_{p_1}) est la partie au-dessus de l'intervalle $[0, 1]$ de la courbe en cloche de Gauss représentative de la densité de probabilité de l'approximation gaussienne de la loi exacte de F_{p_1} , c'est-à-dire de la densité de la loi normale d'espérance $p_1 = 0,52$ et de variance $\frac{p_1(1 - p_1)}{n} = \frac{0,52(1 - 0,52)}{4040} \approx 0,0000617$, comme nous l'avons rappelé dans le sous-paragraph 4.4. Le risque de première espèce est toujours représenté géométriquement par l'aire située sous la courbe de la densité de F (relati-

tivement à P_{p_0}) au-dessus des intervalles $[0, f_1[$ et $]f_2, 1]$, où $[f_1, f_2]$ désigne l'intervalle de fluctuation. Le risque de seconde espèce est représenté géométriquement par l'aire située sous la courbe de la densité de F (relativement à P_{p_1}) au-dessus de l'intervalle de fluctuation $[f_1, f_2]$, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous.

On pourrait faire le calcul du risque de seconde espèce pour d'autres valeurs de p_1 . Par exemple, on va supposer qu'en réalité la probabilité de tomber sur «pile», n'est pas $p_0 = 0,5$, mais plutôt $p_1 = 0,51$, c'est-à-dire calculer $\beta(0,51)$. Le risque de seconde espèce pour $p_1 = 0,51$ est donc égal à la probabilité $P_{0,51}(F \in [0,4845 ; 0,5155])$ alors que la fréquence empirique est calculée à partir d'un échantillon de variable parente une variable de Bernoulli de paramètre $p_1 = 0,51$.

Risques de première et de seconde espèces pour $p = 0,52$ avec IF-Terminal



CALCUL DE RISQUES DE PREMIÈRE
ET DE SECONDE ESPÈCES ...

En suivant la même démarche que précédemment, on aura alors, en introduisant cette fois-ci la variable aléatoire $S_{0,51}$ qui est une variable aléatoire binomiale de loi $B(4040 ; 0,51)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \beta(0,51) &= P_{0,51}(F \in [0,4845 ; 0,5155]) \\ &= P_{0,51}(S \in [1958 ; 2082]). \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \beta(0,51) &= P_{0,51}(S \leq 2082) - P_{0,51}(S \leq 1957) \\ &= 0,7566 - 0,0006 = 0,7560. \end{aligned}$$

D'où un risque de seconde espèce de 75.60 %.

Un calcul avec l'approximation normale de la loi de $F_{0,51}$ donnerait 75,73% en introduisant

$$\text{la variable aléatoire } Z_{0,51} = \frac{F - 0,51}{\sqrt{\frac{0,51(1-0,51)}{4040}}}$$

qui est approximativement normale centrée-réduite.

Pour $p_1 = 0,53$, on peut vérifier que le risque de seconde espèce

$$\begin{aligned} \beta(0,53) &= P_{0,53}(S \leq 2082) - P_{0,53}(S \leq 1957) \\ &= 0,0322 - 0 = 0,0322, \end{aligned}$$

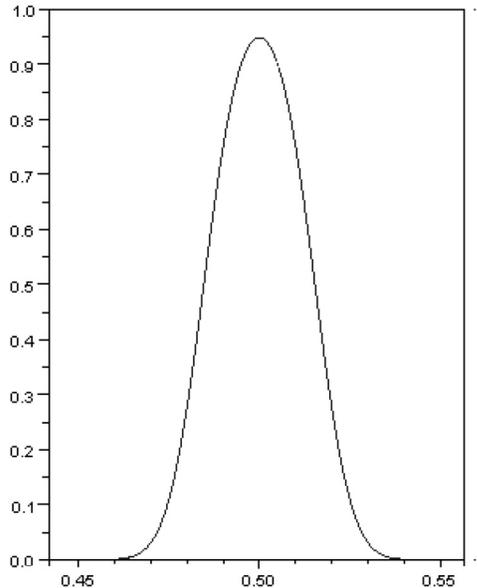
soit un risque de seconde espèce de 3,22 %.

En résumé, avec la règle de décision que nous avons construite dans cette prise de décision sur l'équilibre de la pièce de Buffon, nous avons 4,92 % (pratiquement 5 %) de chances de décider que la pièce n'est pas équilibrée alors qu'en réalité elle l'est (erreur de type I) et nous avons :

- 75,60 % de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu'en réalité elle ne l'est pas si la vraie valeur (inconnue) de la probabilité d'obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,51$ (erreur de type II).

- 28,22 % de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu'en réalité elle ne l'est pas si la vraie valeur (inconnue) de la probabilité d'obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,52$ (erreur de type II).
- 3,22 % de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu'en réalité elle ne l'est pas si la vraie valeur (inconnue) de la probabilité d'obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,53$ (erreur de type II).

On remarque que, plus l'écart entre p_0 et p_1 est important, plus le risque de seconde espèce est faible alors que, par construction, le risque de première espèce est constant et égal pratiquement à 5 %. Par ailleurs, en réalité on ne connaît pas p_1 , on peut alors tracer la courbe de l'application $p \in]0, 1[\setminus \{p_0\} \mapsto \beta(p)$ représentant l'évolution de $\beta(p)$ en fonction de p . On obtient une courbe dont l'allure est la suivante :



Représentation graphique
du risque $\beta(p)$ en fonction de p .

On peut donner une expression en fonction de p de $\beta(p)$. En effet, en introduisant la variable aléatoire $Z_p = \frac{S_p - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ qui est approximativement normale centrée-réduite, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \beta(p) &= P_p(0,4845 \leq F \leq 0,5155) \\ &= P_p(1958 \leq S \leq 2082) \\ &= P_p\left(\frac{1958 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z_p \leq \frac{2082 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \end{aligned}$$

Ce qu'on peut écrire, en introduisant la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite,

$$\beta(p) \approx \Phi\left(\frac{2082 - 4040p}{\sqrt{4040p(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{1958 - 4040p}{\sqrt{4040p(1-p)}}\right)$$

où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ est la valeur en x

de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée-réduite.

2.2 Calculs avec l'IF de Seconde

En gardant les mêmes notations que ci-dessus, le raisonnement fait plus haut avec l'intervalle de fluctuation de Terminale se conduit exactement de la même façon avec l'IF de Seconde qui, calculé pour $p_0 = 0,5$ vaut $[0,4842 ; 0,5158]$.

Il suffit dans les calculs conduits plus haut de remplacer l'intervalle $[0,4845 ; 0,5155]$ par l'intervalle $[0,4842 ; 0,5158]$.

Le risque de première espèce est donc

$$\begin{aligned} P_{0,5}(F \notin [0,4842 ; 0,5158]) \\ = P_{0,5}(S \notin [1957 ; 2083]) \end{aligned}$$

$$= P_{0,5}(S < 1957) + P_{0,5}(S > 2083),$$

où les calculs de probabilité sont conduits sous l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée, ce qui revient à considérer que le nombre de «pile» dans n lancers est exactement une variable binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion $p_0 = 0,5$, autrement dit à utiliser dans les calculs la variable aléatoire S (relativement à $P_{0,5}$). La lecture de la loi binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion $0,5$ à l'aide d'un tableur permet d'obtenir le risque de première espèce :

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{0,5}(S \notin [1957 ; 2083]) \\ &= P_{0,5}(S \leq 1956) + (1 - P_{0,5}(S \leq 2083)) \\ &= 0,0228 + (1 - 0,9772) = 0,0456, \end{aligned}$$

soit 4,56%.

D'où un risque de première espèce $\alpha = P_{0,5}(F \notin [0,4842 ; 0,5158]) = 0,0456$, soit 4,56%. On sait que pour l'IF de Seconde, le risque de première espèce α n'est pas asymptotiquement égal au niveau de signification de 5% fixé pour prendre la décision.

Pour ce qui est du *risque de seconde espèce*, comme l'IF de Seconde contient strictement celui de Terminale, cela signifie que, dans la prise de décision avec l'IF de Seconde on aura tendance à accepter plus facilement l'hypothèse $p = p_0$ que dans la prise de décision avec l'IF de Terminale pour le même risque de première espèce α . On aura donc tendance à refuser l'hypothèse $p \neq p_0$ plus facilement dans le cas de la prise de décision avec l'IF de Seconde que dans celle avec l'IF de Terminale. Ce qui veut dire qu'on doit s'attendre à avoir un risque de seconde espèce plus élevé avec l'IF de Seconde qu'avec l'IF de Terminale. Ce qui peut justifier

que dans ce cas, pour un même risque de première espèce, il vaut mieux utiliser l'IF de Terminale que celui de Seconde.

On dira que la prise de décision avec l'IF de Terminale est plus puissante que celle avec l'IF de Seconde. Plus précisément, la *puissance d'une prise de décision entre l'hypothèse nulle $p = p_0$ et l'hypothèse alternative $p = p_1$* est le réel, noté $\eta(p_1)$ défini par $\eta(p_1) = 1 - \beta(p_1)$.

Par exemple, dans le cas du calcul du risque de seconde espèce avec l'IF de Seconde pour $p_1 = 0,52$, qu'on notera $\beta_2(0,52)$ pour le distinguer de celui calculé avec l'IF de Terminale, on obtient :

$$\begin{aligned}\beta_2(0,52) &= P_{0,52}(F \in [0,4842 ; 0,5158]) \\ &= P_{0,52}(S \in [1957 ; 2083]) \\ &= P_{0,52}(S \leq 2083) - P_{0,52}(S \leq 1956) \\ &= 0,2929 - 0 = 0,2929.\end{aligned}$$

D'où un risque de seconde espèce, de 29,29%. Un calcul avec l'approximation normale de la loi de F donnerait 29,81% en intro-

duisant la variable aléatoire $Z_{0,52} = \frac{F-0,52}{\sqrt{\frac{0,52(1-0,52)}{4040}}}$ qui est approximativement normale centrée-réduite.

Soit un risque de seconde espèce, de 29,29% au lieu de 28,22%. La puissance de la prise de décision avec l'IF de Seconde est donc $\eta_2(0,52) = 1 - \beta_2(0,52) = 0,7071$ (soit 70,71%) alors que la puissance de la prise de décision avec l'IF de Terminale est $\eta(0,52) = 1 - \beta(0,52) = 0,7178$ (soit 71,78%).

Par exemple, dans le cas du calcul du risque de seconde espèce avec l'IF de Seconde pour

$p_1 = 0,53$, qu'on notera $\beta_2(0,53)$ pour le distinguer de celui calculé avec l'IF de Terminale, on obtient :

$$\begin{aligned}\beta_2(0,53) &= P_{0,53}(F \in [0,4842 ; 0,5158]) \\ &= P_{0,53}(S \in [1957;2083]) \\ &= P_{0,53}(S \leq 2083) - P_{0,53}(S \leq 1956) \\ &= 0,0345 - 0 = 0,0345.\end{aligned}$$

D'où un risque de seconde espèce de 3,45%. La puissance de la prise de décision avec l'IF de Seconde est donc $\eta_2(0,53) = 1 - \beta_2(0,53) = 0,9655$ (soit 96,55%).

De même, dans le cas du calcul du risque de seconde espèce avec l'IF de Seconde pour $p_1 = 0,51$, qu'on notera $\beta_2(0,51)$ pour le distinguer de celui calculé avec l'IF de Terminale, on obtient :

$$\begin{aligned}\beta_2(0,51) &= P_{0,51}(F \in [0,4842 ; 0,5158]) \\ &= P_{0,51}(S \in [1957 ; 2083]) \\ &= P_{0,51}(S \leq 2083) - P_{0,51}(S \leq 1956) \\ &= 0,7664 - 0,0005 = 0,7659.\end{aligned}$$

D'où un risque de seconde espèce de 76,59%. La puissance de la prise de décision avec l'IF de Seconde est donc $\eta_2(0,53) = 1 - \beta_2(0,53) = 0,2341$ (soit 23,41%).

En résumé, avec la règle de décision que nous avons construite dans cette prise de décision sur l'équilibre de la pièce de Buffon, nous avons 4,74% (pratiquement 5%) de chances de décider que la pièce n'est pas équilibrée alors qu'en réalité elle l'est (erreur de type I) et nous avons environ :

- 76,59% de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu'en réalité elle ne

l'est pas si la vraie valeur (inconnue) de la probabilité d'obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,51$ (erreur de type II).

- 29,29% de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu'en réalité elle ne l'est pas si la vraie valeur (inconnue) de la probabilité d'obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,52$ (erreur de type II).
- 3,45% de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu'en réalité elle ne l'est pas si la vraie valeur (inconnue) de la probabilité d'obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,53$ (erreur de type II).

2.3 Calculs avec l'IF de Première

Comme avec la variable de décision S, les IF de Terminale et de Première sont les mêmes, on retrouve les mêmes valeurs pour les risques de première et de seconde espèces avec l'IF de Première qu'avec celui de Terminale.

Le risque de première espèce est donc :

$$P_{0,5}(S \notin [1958 ; 2082]) = P_{0,5}(S < 1958) + P_{0,5}(S > 2082),$$

où les calculs de probabilité sont conduits sous l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée, ce qui revient à considérer que le nombre de «pile» dans n lancers est exactement une variable binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion $p_0 = 0,5$. La lecture de la loi binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion 0,5 à l'aide d'un tableur permet d'obtenir le risque de première espèce :

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{0,5}(S \notin [1958 ; 2082]) \\ &= P_{0,5}(S < 1958) + (1 - P_{0,5}(S \leq 2082)) \\ &= 0,0246 + (1 - 0,9754) = 0,0492, \end{aligned}$$

soit 4,92%.

Dans cette prise de décision, le risque exact de première espèce α est différent du seuil initial de 5% fixé pour prendre la décision.

Le risque de seconde espèce dans la prise de décision avec l'IF de Première, par exemple, pour $p_1 = 0,52$, qu'on notera $\beta_1(0,52)$ pour le distinguer de celui calculé avec l'IF de Terminale $\beta(0,52)$ et de celui de Seconde $\beta_2(0,52)$, on obtient : $\beta_1(0,52) = P_{0,52}(S \in [1958 ; 2082])$. La lecture de la loi binomiale de paramètre $n = 4040$ et de proportion 0,52 à l'aide d'un tableur permet d'obtenir le risque de seconde espèce :

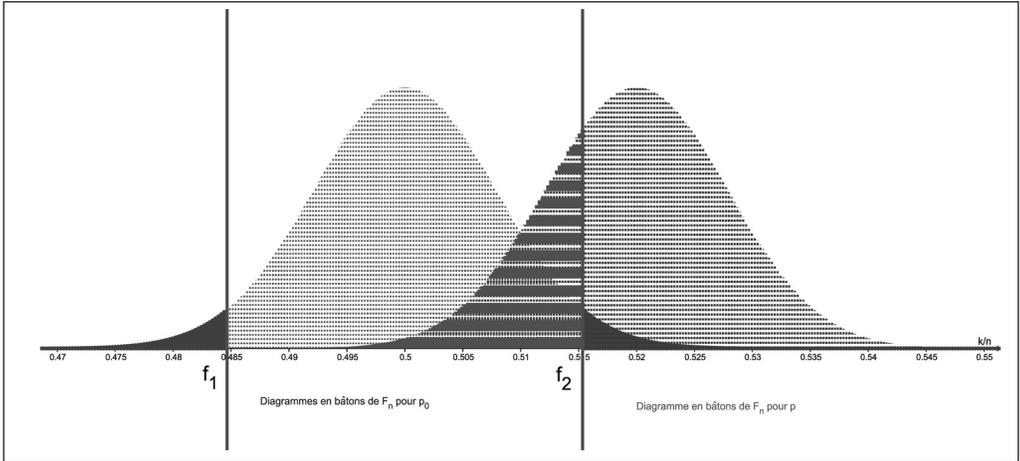
$$\begin{aligned} \beta_1(0,52) &= P_{0,52}(S \leq 2082) - P_{0,52}(S < 1958) \\ &= 0,2822 - 0 = 0,2822. \end{aligned}$$

Soit un risque de seconde espèce, de 28,22% au lieu de 28,43% pour la prise de décision avec l'IF de Terminale, et 29,81% pour la prise de décision avec l'IF de Seconde.

La puissance de la prise de décision avec l'IF de Première est donc $\eta_1(0,52) = 1 - \beta_1(0,52) = 0,7178$ (soit 71,78%) alors que la puissance de la prise de décision avec l'IF de Terminale est $\eta(0,52) = 1 - \beta(0,52) = 0,7157$ (soit 71,57%) et de celle avec l'IF de Seconde est $\eta_2(0,52) = 0,7019$ (soit 70,19%).

En résumé, avec la règle de décision que nous avons construite dans cette prise de décision sur l'équilibre de la pièce de Buffon, nous avons 4,92% (pratiquement 5%) de chances de décider que la pièce n'est pas équilibrée alors qu'en réalité elle l'est (erreur de type I) et nous avons environ :

- 75,60% de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu'en réalité elle ne l'est pas si la vraie valeur (inconnue) de la



Risques de première et de seconde espèces pour $p = 0,52$

probabilité d’obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,51$ (erreur de type II).

3. — Conclusion

L’exemple de la pièce de Buffon nous montre que les différents intervalles de fluctuation, introduits au lycée, sont susceptibles d’être utilisés dans la même prise de décision. La justification de ce choix avec les seuls outils exigibles au programme peut mettre le professeur dans l’embarras lorsqu’il s’agit de répondre à une question des élèves. En effet, si le risque de première espèce peut être évalué et justifié à partir du raisonnement même mis en place pour prendre la décision, nous avons vu que la connaissance de ce seul risque n’est pas suffisante pour discuter la puissance de la prise de décision, et par conséquent le meilleur choix de l’intervalle de fluctuation. La prise en compte

- 28,22% de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu’en réalité elle ne l’est pas si la vraie valeur (inconnue) de la probabilité d’obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,52$ (erreur de type II).
- 3,22% de chances de décider que la pièce est équilibrée alors qu’en réalité elle ne l’est pas si la vraie valeur (inconnue) de la probabilité d’obtenir «pile» en la lançant est $p_1 = 0,53$ (erreur de type II).

Résumons les valeurs obtenues dans le tableau ci-dessous :

Classe	α	$\beta(0,51)$	$\beta(0,52)$	$\beta(0,53)$
Seconde	4,56	76,59	29,29	3,45
Première & Terminale	4,92	75,60	28,22	3,22

du risque de seconde espèce est nécessaire pour maîtriser la problématique de la prise de décision. Moyennant cette notion nouvelle, nous avons vu comment la longueur de l'IF intervient dans la performance de la prise de décision. De plus, on comprend mieux la raison mathématique du résultat assez intuitif qui veut que, plus l'écart entre p_0 et p_1 est important, plus la prise de décision est performante et plus on peut discriminer les deux hypothèses.

Cet exemple a été aussi l'occasion d'illustrer l'usage de l'approximation gaussienne de la loi binomiale, et nous avons vu que l'erreur d'approximation commise était somme toute assez faible lorsque qu'on se cantonne aux conditions des grandes binomiales.

4. — ANNEXE : Le cadre statistique du lancer de pièce

4.1 La définition d'un modèle statistique

Pour proposer un modèle de la situation on s'intéresse au résultat du lancer. L'expérience aléatoire du lancer d'une pièce est une expérience à deux issues, «pile» ou «face». On posera comme ensemble des issues l'ensemble $\Omega = \{\text{«pile»}, \text{«face»}\}$.

Dans cette expérience aléatoire, on ne peut définir que quatre événements distincts :

- l'événement *certain*, modélisé par $\Omega = \{\text{«pile»}, \text{«face»}\}$;
- l'événement *impossible*, modélisé par \emptyset ;
- l'événement « *Obtenir «face» dans le lancer considéré de la pièce de Buffon* », modélisé par $\{\text{«face»}\}$;
- l'événement « *Obtenir «pile» dans le lancer considéré de la pièce de Buffon* », modélisé par $\{\text{«pile»}\}$.

La tribu des événements considérée est donc $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{\text{«pile»}\}, \{\text{«face»}\}\}$ l'ensemble de toutes les parties de Ω .

Comme nous n'avons aucune information sur la probabilité d'avoir «pile», tout ce que nous pouvons dire sur le «bon» modèle probabiliste pour le lancer de cette pièce, c'est qu'il est constitué de l'ensemble Ω , des événements de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et d'une probabilité – définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ – dont on sait seulement qu'elle fait partie des probabilités définies de la façon suivante :

Pour tout réel $p \in]0, 1[$, on considère la probabilité Q_p sur Ω telle que $Q_p(\{\text{«pile»}\}) = p$, c'est-à-dire l'application :

$$Q_p : A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto Q_p(A),$$

$$\text{avec } Q_p(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = \Omega \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \\ p & \text{si } A = \{\text{«pile»}\} \\ 1 - p & \text{si } A = \{\text{«face»}\} \end{cases}.$$

On a ainsi défini, pour tout réel $p \in]0, 1[$, un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Q_p)$ modélisant l'expérience aléatoire de Bernoulli qui consiste à s'intéresser au résultat «pile» ou «face» quand on lance une fois la pièce de Buffon, lorsque la probabilité d'avoir «pile» est p . Tout ce qu'on peut dire pour l'instant, c'est que le «bon» modèle se trouve parmi ceux-ci.

La donnée de cette famille d'espaces de probabilité, indexée par $p \in]0, 1[$, s'appelle le *modèle statistique* du lancer de pièce. On dit que le réel p est le *paramètre* du modèle statistique et l'ensemble des valeurs admissibles pour p , ici l'intervalle $]0, 1[$, s'appelle l'*espace des paramètres* du modèle statistique. On dit

aussi que la valeur de p est déterminée par «l'état de la nature» (qu'on ne connaît pas) de la pièce. Dire que l'état de nature de la pièce est p revient à considérer que la probabilité d'avoir «pile» avec la pièce de Buffon est p .

Le modèle statistique permet de prendre en compte a priori toutes les valeurs possibles de p dans les raisonnements, c'est à dire tous les états de la nature de la pièce a priori. Le rôle de la statistique est alors de mettre en place des démarches basées sur l'observation de la répétition de l'expérience aléatoire du lancer de pièce pour pouvoir prendre des décisions sur l'état de la nature de l'expérience étudiée.

Afin de faciliter des calculs ultérieurs, notamment celui de la fréquence des «pile» dans plusieurs lancers, nous allons nous ramener à manipuler des nombres (associés aux deux issues possibles) en considérant, la variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par :

$$X : x \in \Omega = \{\text{«pile»}, \text{«face»}\} \mapsto X(x),$$

avec

$$X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est "pile"} \\ 0 & \text{si } x \text{ est "face"} \end{cases}.$$

Pour chaque réel $p \in]0, 1[$, la v.a.r. X , définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), Q_p)$, est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p , ce qui signifie que

$$Q_p(X = 0) = Q_p(\{\text{«face»}\}) = 1 - p$$

et

$$Q_p(X = 1) = Q_p(\{\text{«pile»}\}) = p.$$

4.2 L'expression mathématique du prélèvement d'échantillon

Pour prendre une décision sur l'équilibre de la pièce, Buffon fait une observation de

4040 lancers et regarde pour chacun des 4040 lancers s'il obtient «pile» ou s'il obtient «face» (Dans la suite pour simplifier, sauf avis contraire, on écrira n dans les relations au lieu de 4040).

S'intéresser à n lancers à l'identique de la pièce de Buffon revient à introduire une seconde expérience aléatoire dont les issues sont cette fois-ci des suites des n résultats, «pile» ou «face», de chacun des n lancers de la pièce, c'est-à-dire des suites à n termes, prenant la valeur «pile» ou «face», d'éléments de l'ensemble Ω .

Pour décrire les issues de cette seconde expérience aléatoire, il est naturel d'introduire l'ensemble, noté Ω^n , de toutes les suites (n -uplets) d'éléments de Ω à n termes, i.e. l'ensemble Ω^n des suites $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ où, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, ω_k est l'un des deux termes «pile» ou «face».

Dans cette seconde expérience aléatoire, il y a beaucoup d'événements susceptibles de nous intéresser, qui sont modélisés mathématiquement par toutes les parties de Ω^n . Comme $\text{Card}(\Omega^n) = 2^n$, on peut donc définir exactement 2^{2^n} événements distincts. Comme l'ensemble Ω^n est fini, il est d'usage de prendre comme tribu des événements l'ensemble, noté $\mathcal{P}(\Omega^n)$, de toutes les parties de Ω^n .

En pratique, dans la démarche de prise de décision que nous allons développer, nous serons amenés à nous intéresser à deux grandes familles d'événements :

- pour tout entier $0 \leq k \leq n$, l'événement « Obtenir exactement k «pile» dans les n lancers considérés de la pièce de Buffon », modélisé par

$$D_k = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in$$

$$\Omega^n / X(\omega_1) + X(\omega_2) + \dots + X(\omega_n) = k\};$$

— pour tout réel $f \in [0, 1]$, l'événement « Obtenir exactement une fréquence f de «pile» dans les n lancers considérés de la pièce de Buffon », modélisé par

$$\Delta_f = \left\{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega^n / \frac{X(\omega_1) + X(\omega_2) + \dots + X(\omega_n)}{n} = f \right\}.$$

Pour ce qui est de la probabilité à prendre en compte dans ce modèle, on montre (et on l'admettra) que, pour tout réel $p \in]0, 1[$, il existe une unique probabilité P_p sur Ω^n telle que, pour tout événement B de la forme

$$B = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subseteq \Omega^n$$

où les facteurs A_i sont des parties quelconques de Ω , la probabilité P_p vérifie la relation remarquable suivante :

$$P_p(B) = P_p(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = Q_p(A_1) \cdot Q_p(A_2) \cdot \dots \cdot Q_p(A_n).$$

On a ainsi défini, pour tout réel $0 < p < 1$, un espace de probabilité $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), P_p)$ qui modélise l'expérience aléatoire consistant à lancer à l'identique n fois la pièce de Buffon et à noter si on obtient «pile» ou si on obtient «face», lorsque la probabilité d'avoir «pile» est p .

On considère alors, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, la variable aléatoire X_i définie par :

$$X_i : \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega^n \mapsto X_i(\omega) = X(\omega_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_i \text{ est "pile"} \\ 0 & \text{si } \omega_i \text{ est "face"} \end{cases}$$

Pour tout $0 < p < 1$ fixé, on a, compte tenu que $Q_p(\Omega) = 1$ et la propriété remarquable de produit caractérisant P_p vue plus haut,

$$\begin{aligned} P_p(X_i = 1) &= P_p(\Omega \times \Omega \times \dots \times \{\text{«pile»}\} \times \Omega \times \dots \times \Omega) \\ &= Q_p(\Omega) \cdot Q_p(\Omega) \cdot \dots \cdot Q_p(\{\text{«pile»}\}) \cdot Q_p(\Omega) \cdot \dots \cdot Q_p(\Omega) \\ &= Q_p(\{\text{«pile»}\}) = p. \end{aligned}$$

De même : $P_p(X_i = 0) = Q_p(\{\text{«face»}\}) = 1 - p$.
Ce qu'on peut résumer en écrivant que, pour tout réel $0 < p < 1$ fixé, tout entier $k \in \{0, 1\}$ et tout entier $i = 1, 2, \dots, n$ on a :

$$P_p(X_i = k) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \end{cases}.$$

Pour tout $0 < p < 1$ fixé, et pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, la variable aléatoire X_i est donc une variable de Bernoulli de paramètre p relativement à l'espace de probabilité $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), P_p)$.

La définition de la probabilité P_p implique que, pour tout $0 < p < 1$, la suite de variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) est indépendante relativement à la probabilité P_p .

En effet, pour tout $0 < p < 1$ fixé et pour tout n -uplet $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \{0, 1\}^n$ on a, en utilisant la propriété remarquable de la probabilité P_p donnée ci-dessus,

$$\begin{aligned} P_p(\{X_1 = k_1\} \cap \{X_2 = k_2\} \cap \dots \cap \{X_n = k_n\}) &= \\ &= P_p(\{X_1 = k_1\} \times \{X_2 = k_2\} \times \dots \times \{X_n = k_n\}) \\ &= Q_p(X = k_1) \cdot Q_p(X = k_2) \cdot \dots \cdot Q_p(X = k_n) \\ &= P_p(X_1 = k_1) \cdot P_p(X_2 = k_2) \cdot \dots \cdot P_p(X_n = k_n). \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'indépendance de la suite de variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) relatif

vement à la probabilité P_p . On introduit ainsi, pour tout réel $0 < p < 1$, une suite de n variables aléatoires de Bernoulli (X_1, X_2, \dots, X_n) indépendantes, de même paramètre p définies sur le même espace de probabilité $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), P_p)$.

On traduit cela en disant que la suite (X_1, X_2, \dots, X_n) constitue un échantillon aléatoire indépendant de taille n de loi parente la loi de Bernoulli de paramètre p . La donnée de cet échantillon ainsi construit sur $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), P_p)$, pour tout réel $0 < p < 1$, est appelée un échantillonnage de taille n du lancer de pièce.

4.3 Les observables de l'information statistique

Pour exploiter les informations contenues dans l'échantillon, nous aurons besoin de variables aléatoires, qui vont tenir lieu d'«observables statistiques» du phénomène étudié par l'intermédiaire de l'échantillon prélevé, qu'on appelle des *statistiques* définies sur le modèle d'échantillonnage ; plus précisément ce sont, pour tout p , des variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), P_p)$ qui peuvent s'exprimer comme des fonctions des n v.a.r. X_1, X_2, \dots, X_n de l'échantillon.

Ces statistiques définies à partir de l'échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) qui nous seront utiles sont notamment :

1) l'effectif empirique $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ qui représente le nombre de «pile» obtenus dans n lancers de la pièce de Buffon.

2) la fréquence empirique $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ qui représente la proportion de «pile»

obtenus dans n lancers de la pièce de Buffon.

Remarquons que, pour tout

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega^n,$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega) \\ = X(\omega_1) + X(\omega_2) + \dots + X(\omega_n) \end{aligned}$$

et

$$\frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = \frac{X(\omega_1) + X(\omega_2) + \dots + X(\omega_n)}{n}.$$

Ces deux statistiques sont des applications de Ω^n dans \mathbf{R} . Plus précisément, l'effectif empirique $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers $\{0, 1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbf{N}$, et la fréquence empirique $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ prend ses valeurs dans l'ensemble des rationnels $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\} \subseteq [0, 1]$. Ces deux statistiques sont donc des variables aléatoires discrètes qui prennent un nombre fini de valeurs.

Avec ces statistiques et compte tenu des remarques précédentes, les événements qui nous intéresseront dans cet article se notent alors :

— pour tout entier $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} D_k = \{\omega \in \Omega^n / X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega) = k\}, \\ \text{ou plus simplement comme il est d'usage} \\ \text{en calcul des probabilités} \end{aligned}$$

$$D_k = \{X_1 + X_2 + \dots + X_n = k\};$$

— pour tout réel $f \in [0, 1]$, $\Delta_f =$

$$\left\{ \omega \in \Omega^n / \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = f \right\},$$

ou plus simplement :

$$\Delta_f = \left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = f \right\}.$$

On a de façon immédiate la relation entre événements, pour tout entier $0 \leq k \leq n$,

$$D_k = \{X_1 + X_2 + \dots + X_n = k\} = \left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{k}{n} \right\} = \Delta_{k/n}.$$

Les statistiques

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n : \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega^n \mapsto X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega) \in \mathbf{N}$$

et

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} : \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega^n \mapsto \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} \in [0, 1]$$

sont des applications qui dépendent explicitement de l'entier n , mais qui ne dépendent pas du réel p , sauf à vouloir faire référence à la structure d'espace de probabilité dont est muni Ω^n .

Nous noterons ces deux statistiques, en posant $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et

$$F_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Avec ces notations, pour tout entier $0 \leq k \leq n$, la notation $\{S_n = k\}$ représentera l'événement « *Obtenir exactement k «pile» dans les n lancers considérés de la pièce de Buffon* », et la notation $\{F_n = k/n\}$ représentera l'événement « *Obtenir exactement une fréquence k/n*

de «pile» dans les n lancers considérés de la pièce de Buffon ». Nous ferons souvent usage par la suite de la relation immédiate $S = nF$ entre ces statistiques, et de l'égalité $\{S_n = k\} = \{F_n = k/n\}$ entre ces deux événements.

Le plus important pour la suite est de retenir que la notation $P_p(S_n = k)$, où k est un entier naturel, désigne alors la probabilité qu'il y ait exactement k «pile» dans n lancers de la pièce de Buffon, lorsque la probabilité d'avoir «pile» avec cette pièce vaut p . De même, la notation $P_p(F_n \in I)$, où I est un intervalle donné de \mathbf{R} , désignera la probabilité que la proportion de «pile» dans n lancers de la pièce de Buffon soit dans l'intervalle I , lorsque la probabilité d'avoir «pile» avec cette pièce vaut p .

Remarquons que, dans le modèle d'échantillonnage de Bernoulli, la fréquence empirique n'est rien d'autre que la moyenne empirique de l'échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) . Pour effectuer les calculs, nous avons maintenant besoin de préciser les lois de ces statistiques. A cet effet, il est utile d'introduire une autre variable aléatoire (qui n'est pas une statistique car elle dépend de p), notée $Z_{n,p}$, définie par :

$$Z_{n,p} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

qui représente la variable aléatoire standardisée des deux variables aléatoires S_n et F_n pour l'état de nature p .

4.4 Le comportement aléatoire de la fréquence

Le calcul des probabilités nous renseigne sur les lois de ces variables aléatoires. On sait que :

- 1) pour tout $p \in]0, 1[$ et tout entier naturel $n \geq 1$, la variable aléatoire discrète S_n suit

exactement (relativement à P_p) la loi binomiale $B(n, p)$, i.e. pour tout entier $0 \leq k \leq n$,

$$P_p(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k};$$

2) pour tout $p \in]0, 1[$ et tout entier naturel $n \geq 1$, la variable aléatoire discrète F_n suit exactement (relativement à P_p) la loi discrète calculée à partir de la loi binomiale précédente, pour tout entier $0 \leq k \leq n$, par

$$P_p(F_n = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

En vertu du théorème de De Moivre-Laplace, pour tout $p \in]0, 1[$, la loi de $Z_{n,p}$ converge lorsque n tend vers l'infini, vers la loi normale centrée-réduite i.e. pour tous réels a et b avec $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(a \leq Z_{n,p} \leq b) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\text{où } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \text{ est la valeur en } x$$

de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée-réduite.

On exprime parfois ce dernier résultat en disant que, pour tout p , la loi normale centrée-réduite est la *loi asymptotique* ou la *loi limite* de la variable aléatoire $Z_{n,p}$ (sous-entendu lorsque n tend vers l'infini).

Le résultat du théorème de De Moivre-Laplace a pour conséquence pratique que, lorsque p est voisin de $1/2$, compte tenu que dans l'observation de Buffon, $n = 4040$ est très grand, la loi de la variable aléatoire $Z_{n,p}$ peut être approximée par la loi normale centrée-réduite. Et par conséquence, sous les mêmes conditions sur n et p , on obtient les *approximations gaussiennes* suivantes des lois exactes précédentes :

1) la loi (relativement à P_p) de la variable

aléatoire $F_n = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} Z_{n,p}$ peut être approximée par la loi normale d'espérance p et de variance $\frac{p(1-p)}{n}$;

2) la loi (relativement à P_p) de la variable

aléatoire $S_n = np + \sqrt{np(1-p)} Z_{n,p}$ peut être approximée par la loi normale d'espérance np et de variance $np(1-p)$.

4.5 L'erreur d'approximation en loi

Que signifie approximer la loi de la variable aléatoire $Z_{n,p}$?

Pour p fixé, la loi exacte de la variable aléatoire $Z_{n,p}$ intervient concrètement dans les calculs de probabilité par des expressions de la forme $P_p(a \leq Z_{n,p} \leq b)$ pour certaines valeurs de a et b avec $a < b$.

Approximer la loi exacte de $Z_{n,p}$ par la loi normale centrée-réduite, revient à substituer dans tous les calculs l'expression $P_p(a \leq Z_{n,p} \leq b)$ par sa limite $\Phi(b) - \Phi(a)$, qui

est la probabilité qu'une variable aléatoire de loi normale centrée-réduite soit comprise entre les réels a et b .

En effectuant cette substitution, on commet bien sûr une *erreur d'approximation*. Cette erreur a fait l'objet de nombreux travaux dans le cadre de l'approximation gaussienne de la loi binomiale parmi lesquels nous retiendrons, et admettrons, le résultat suivant sur la majoration uniforme de l'erreur (Uspensky, 1937, cité dans [8]) qui permet d'avoir une première évaluation rapide de l'erreur :

Si $np(1 - p) \geq 25$ alors, pour tous réels a et b avec $a < b$, on a la majoration (uniforme en a et b) :

$$|P_p(a \leq Z_{n,p} \leq b) - [\Phi(b) - \Phi(a)]| \leq \frac{0,588}{\sqrt{np(1 - p)}}$$

Dans le cas de la pièce de Buffon où $n = 4040$, par exemple si $0,47 \leq p \leq 0,53$,

on aura l'erreur commise majorée par $\frac{0,588}{\sqrt{np(1 - p)}} \approx 0,0185$. On voit que pour les valeurs de p dont nous avons eu besoin plus haut, cette erreur est relativement faible. On peut noter aussi que, pour n fixé, ce majorant est minimum pour $p = 1/2$. En revanche lorsque p se rapproche de 0 ou de 1, ce majorant tend à «exploser». Dans le cas où le majorant uniforme de l'erreur serait trop élevé, il faudrait faire appel à des résultats plus fins (cf. [8]) pour améliorer le calcul d'erreur.

Les remarques précédentes peuvent faire mieux comprendre l'origine des conditions de validité dites «des grandes binomiales», à savoir n grand et p proche de $1/2$, qui sont retenues pour légitimer les approximations gaussiennes de la loi binomiale. Au lycée, ces conditions s'expriment en classe de Seconde par la double condition $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$, et en Terminale par la triple condition $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.

Références

- [1] Buffon, Georges-Louis Leclerc, Comte de, *Essai d'arithmétique morale*, réédition in *Un autre Buffon*, Collection «Savoir», Hermann Sciences, Paris 1977.
- [2] Duclé Yves, *Introduction à la théorie mathématique des probabilités*, Ellipses, 1998.
- [3] Duclé Yves, Saussereau Bruno, « Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en Troisième? », *Repères IREM*, 77, octobre 2009, Topiques éditions, Nancy, 2009.
- [4] Duclé Yves, Saussereau Bruno, « La prise de décision de la Seconde à la Première », *Repères IREM*, 85, octobre 2011, Topiques éditions, Nancy, 2011.
- [5] Ministère Éducation nationale, *Statistiques et probabilités : classe de Seconde*, Document ressource, Ministère de l'Éducation nationale, juin 2009 (téléchargeable sur le site Web eduscol).
- [6] Ministère Éducation nationale, *Statistiques et probabilités : classe de Première générale et technologique*, Document ressource, Ministère de l'Éducation nationale, 2011 (téléchargeable sur le site Web eduscol).
- [7] Ministère Éducation nationale, *Statistiques et probabilités : classe de Terminale générale et technologique*, Document ressource, Ministère de l'Éducation nationale, 2012 (téléchargeable sur le site Web eduscol).
- [8] Suquet Charles, *Théorème-limite central*, Cours 2005-2006 de l'agrégation externe de mathématiques (fichier PDF librement accessible sur Internet), Université des sciences et technologies de Lille, 2006.
- [9] Verlant Bernard, *Statistique et probabilités (BTS industriels des groupements B, C, D)*, Manuel scolaire, tome 2, Éditions Foucher, Vanves, 2009.