CTU
Licence Math. Semestre 5
Calcul des probabilités

$\boxed{\text{Devoir III}}$

à rendre le 01/01/2013

Ce devoir est à renvoyer à

Bruno SAUSSEREAU,

Laboratoire de mathématiques de Besançon,

UFR Sciences et Techniques,

16, route de Gray,

25030 Besançon cedex,

FRANCE

Exercice 1

Une région comporte dix hôpitaux, chacun ayant une capacité opératoire journalière de dix patients. Le nombre de personnes se présentant chaque jour pour être opérées dans l'hôpital i, $1 \leq i \leq 10$, est modélisé par une v.a.r. de Poisson X_i de paramètre 8. On suppose de plus que la suite des v.a.r. $(X_1, \cdots, X_{10})$ est indépendante. On considère un jour donné.

1. Quelle est la probabilité qu'un hôpital donné soit obligé de refuser un patient ?
2. Quelle est la probabilité que l'un au moins des hôpitaux soit obligé de refuser un patient ?
3. On suppose maintenant qu'un hôpital saturé a la possibilité de se délester sur un hôpital non saturé. Quelle est la probabilité qu'un patient ne puisse se faire opérer ce jour-là dans un des dix hôpitaux de la région ?

Exercice 2

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes normales centrées-réduites. Déterminer la loi de probabilité de la v.a.r. $Z := \frac{X}{Y}$.

Exercice 3

On considère une v.a. $X = (X_1, X_2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ suivant une loi de densité $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} \mathbb{1}_{x_1 \geq x_2 \geq 0}$.

1. Calculer la densité f_1 de la v.a.r. X_1 et f_2 la densité de la v.a.r. X_2.
2. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a. telle que la loi de X_n est une loi $\mathcal{E}(\lambda_n)$. On suppose que $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda > 0$.

Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$

1. en utilisant la définition de la convergence en loi ;
2. en utilisant le critère des fonctions de répartition ;
3. en utilisant le critère des fonctions caractéristiques.

Laquelle de ces trois méthodes vous semble la plus rapide ?

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite indépendante et identiquement distribuée de v.a.r. de carré intégrable d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 > 0$. Le but de cet exercice est de proposer une démonstration du théorème-limite central.

1. Quelle-est la fonction caractéristique de la v.a. $(X_1 + ... + X_n)/(\sigma/\sqrt{n})$?
2. Écrire le développement limité (à l'ordre 2) de la fonction caractéristique Φ_{X_1} en 0.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi_{\frac{X_1 + ... + X_n}{\sigma/\sqrt{n}}}(u)$ et en déduire la convergence en loi de la suite $(\frac{X_1 + ... + X_n}{\sigma/\sqrt{n}})_{n \geqslant 1}$.

Corrigé du devoir III

Exercice 1 Enoncé p. 2

1. L'événement "l'hôpital i doit refuser un patient" se modélise par $\{X_i \geqslant 11\}$. Par suite

$$\mathbb{P}(X_i \geqslant 11) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leqslant 10) = 1 - \left[\mathbb{P}(X_i = 1) + \cdots + \mathbb{P}(X_i = 10)\right] \simeq 1 - 0,816 = 18,4\% \, .$$

2. L'événement "un hôpital au moins sur les dix refuse un patient" se modélise par

$$\{X_1 \geqslant 11\} \cup \cdots \cup \{X_{10} \geqslant 11\}$$

dont l'événement complémentaire est

$$\{X_1 \leqslant 10\} \cap \cdots \cap \{X_{10} \leqslant 10\} \, .$$

Comme les va. X_i sont i.i.d. on écrit que la probabilité p recherchée est

$$\begin{aligned} p &= 1 - \mathbb{P}\left((X_1 \leqslant 10) \cap \cdots \cap (X_{10} \leqslant 10)\right) \\ &= 1 - \left(\mathbb{P}(X_1 \leqslant 10)\right)^{10} \\ &= 1 - (0,816)^{10} \simeq 87\% \, . \end{aligned}$$

3. Soit Y le nombre total de patients se présentant dans l'ensemble des dix hôpitaux : $Y = X_1 + \cdots + X_{10}$. Donc Y est une variable de Poisson de paramètre $8 \times 10 = 80$. Donc on peut aussi écrire $Y = \sum_{i=1}^{80} Z_i$ avec $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant 80}$ des v.a.r.i.i.d. de loi de Poisson de paramètre 1. L'événement qui nous intéresse est $\{Y \geqslant 101\}$. On va appliquer le théorème central limite pour déterminer une valeur approchée de sa probabilité. On écrit en notant T une v.a. de loi $\mathcal{N}(0;1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geqslant 101) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{80} Z_i \geqslant 101\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\frac{1}{80}\sum_{i=1}^{80} Z_i - 1}{1/\sqrt{80}} \geqslant \frac{\frac{101}{80} - 1}{1/\sqrt{80}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}(T \geqslant 2,34) = 1 - \mathbb{P}(T \leqslant 2,34) = 1 - 0,9904 = 0,96\% \, . \end{aligned}$$

La probabilité qu'un patient ne puisse se faire opérer ce jour-là dans un des dix hôpitaux de la région est donc de l'ordre de 1%.

Exercice 2 Enoncé p. 2

- Notons que Z est bien définie pour tout ω tel que $Y(\omega) \neq 0$. Or $\mathbb{P}(Y \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1$ car Y est une v.a.r. à densité et donc $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$.
- Soit h mesurable positive, calculons

$$\mathbb{E}(h(Z)) = \mathbb{E}(h(X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x/y) d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x/y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \ .$$

On applique le théorème de changement de variables avec

$$(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \xrightarrow{T} (u,v) = (x, x/y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \ .$$

D'où

$$\mathbb{E}(h(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} h(v) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}(1+\frac{1}{v^2})} \frac{|u|}{v^2} dudv \ ,$$

avec $|u|/v^2$ étant la valeur absolue du jacobien de T^{-1} au point (u,v). Par le théorème de Tonelli :

$$\mathbb{E}(h(Z)) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}(1+\frac{1}{v^2})} \frac{|u|}{v^2} du}_{:=g(v)} \ h(v) dv \ ,$$

et donc la fonction g est la densité de la v.a. Z. Il reste à l'identifier. On effectue les calculs suivant :

$$g(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}\left(\frac{v^2+1}{v^2}\right)} \frac{|u|}{v^2} du = \frac{1}{\pi v^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}\left(\frac{v^2+1}{v^2}\right)} udu \ .$$

Posons $t = \frac{v^2+1}{2v^2} u^2$, $dt = \frac{v^2+1}{v^2} udu$ et par ce changement de variables,

$$g(v) = \frac{1}{\pi(v^2+1)} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{\pi(v^2+1)}$$

et donc Z est une v.a.r. de loi de Cauchy de paramètre 1 (voir exercice 57).

Exercice 3 Enoncé p. 2

1. La densité de X_1 est donnée par

$$f_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1} \mathbb{1}_{x_1 \geq x_2 \geq 0} dx_2 = e^{-x_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 = x_1 e^{-x_1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_1) \ .$$

   On obtient de même que $f_2(x_2) = e^{-x_2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_2)$.
2. On remarque que pour tout x_1, x_2 positifs, $f_1(x_1) \times f_2(x_2) = x_1 e^{-x_1 - x_2} \neq f(x_1, x_2)$ et donc les v.a. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 Enoncé p. 2

1. Soit g une fonction continue bornée, calculons $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(g(X_n))$. Si on admet en un premier temps que l'on peut intervertir lim et $\int$, alors on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} g(x)\lambda_n e^{-\lambda_n x}dx = \int_0^{+\infty} g(x)e^{-\lambda x}dx = \mathbb{E}(g(X))$$

avec X une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Appliquons le théorème de convergence dominée pour justifier cette intervertion de lim et $\int$. On introduit pour cela la suite de fonction intégrable $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $f_n(x) = g(x)\lambda_n e^{-\lambda_n x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$. On a pour tout x :

$$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\ .$$

Il reste à trouver une fonction positive intégrable h telle que $\sup_n |f_n(x)| \leqslant h(x)$. Pour cela on utilise le fait que $\lim_n \lambda_n = \lambda$. Il existe donc un rang n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $\lambda/2 \leqslant \lambda_n \leqslant 3\lambda/2$ (c'est la définition quantifiée de la limite en choisissant $\varepsilon = \lambda/2$). Ainsi comme g est bornée (par M) on obtient que

$$|f_n(x)| \leqslant M\times 3\lambda/2\times e^{-\lambda/2}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) := \tilde{h}(x)$$

et la fonction $\tilde{h}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. Cette majoration n'est valable que pour $n\geqslant n_0$. Si on veut être rigoureux, on écrit

$$\sup_n |f_n(x)| \leqslant \left(|f_1(x)|,\cdots,|f_{n_0}(x)|,\tilde{h}(x)\right) := h(x)$$

qui est aussi intégrable et indépendante de n. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et le passage à la limite dans l'intégrale est justifié. Ainsi $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

2. Si on utilise les fonctions de répartitions, la convergence en loi est équivalente à la convergence des fonctions de répartitions en tout point de continuité de la fonction de répartition de la loi limite. Cela signifie que l'on étudie la limite suivante :

$$\lim_n \mathbb{P}(X_n\leqslant t) = \lim_n \left(1-e^{-\lambda_n t}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) = \left(1-e^{-\lambda t}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) = \mathbb{P}(X\leqslant t)$$

toujours avec X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Ainsi on obtient plus rapidement la convergence en loi.

3. Avec les fonctions caractéristiques, on utilise le formulaire pour écrire que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$:

$$\Phi_{X_n}(\xi) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - i\xi} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \frac{\lambda}{\lambda - i\xi} = \Phi_X(\xi)$$

et on obtient aussi très rapidement la convergence en loi.

4. Je trouve que la troisième méthode est la plus éfficace pourvu que la fonction caractéristique soit présente dans le formulaire.

Exercice 5 Enoncé p. 2

1. En utilisant l'indépendance de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ on écrit pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Phi_{(X_1+\cdots+X_n)/(\sigma/\sqrt{n})}(\xi) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\xi\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\left(\frac{\xi}{\sigma/\sqrt{n}}\right)(X_1+\cdots+X_n)\right)\right]\\ &= \Phi_{X_1+\cdots+X_n}\left(\frac{\xi}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\\ &= \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right)^n .\end{aligned}$$

2. On a $\Phi_{X_1}(u) = \Phi_{X_1}(0) + \frac{\Phi'_{X_1}(0)}{1!}u + \frac{\Phi''_{X_1}(0)}{2!}u^2 + u^2\varepsilon(u)$ avec ε une fonction vérifiant $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$ et de plus on a la relation entre les moments de la v.a. X_1 et la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}\Phi'_{X_1}(0) &= i\mathbb{E}(X_1) = 0\\ \Phi''_{X_1}(0) &= i^2\mathbb{E}(X_1^2) = -\sigma^2 .\end{aligned}$$

Donc on obtient le développement limité suivant :

$$\Phi_{X_1}(u) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}u^2 + u^2\varepsilon(u) .$$

3. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\xi^2}{\sigma^2/n} + \frac{1}{n}^2\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2n} + \circ(1/n) .$$

Par suite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Phi_{(X_1+\cdots+X_n)/(\sigma/\sqrt{n})}(\xi) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\xi^2}{2n} + \circ(1/n)\right)^n\\ &= \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)\\ &= \Phi_X(\xi)\end{aligned}$$

avec X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Par la proposition 6.16, on en déduit que

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{en loi}} \mathcal{N}(0;1) .$$