CTU

Licence Math. Semestre 5

Calcul des probabilités

$\boxed{\text{Devoir II}}$

à rendre le 01/12/2012

Ce devoir est à renvoyer à

Bruno SAUSSEREAU,

Laboratoire de mathématiques de Besançon,

UFR Sciences et Techniques,

16, route de Gray,

25030 Besançon cedex,

FRANCE

Exercice 1

On dit qu'une variable aléatoire X suit un loi de Pareto de paramètres a et α (avec $a > 0$, $\alpha > 0$), si X a pour densité la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a\,; \\ \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1}, & \text{si } x \geqslant a. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est positive et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Ainsi f sera bien une densité de probabilité.
2. Montrer que X admet un moment d'ordre p pour $p < \alpha$.
3. Calculer, lorsqu'elles existent, $\mathbb{E}(X)$ et $VAR(X)$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Identifier la loi de $X^+ = \sup(X,0)$ en utilisant le critère des fonctions positives.

Exercice 3

Soit f l'application de $[0,1] \times [0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)\ .$$

En utilisant le théorème de Fubini, calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\sin^2(y)dy\ .$$

Exercice 4

Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx$.

Exercice 5

Soit $\lambda > 0$.

1. Écrire le développement en série entière à l'origine de la fonction $t \mapsto \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
2. En déduire les moments de tout ordre d'une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Corrigé du devoir II

Exercice 1 Enoncé p. 2

1. f est clairement positive et un rapide calcul donne l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Il faut bien préciser que cette intégrale est bien définie car $\alpha + 1 > 1$.
2. Le moment d'ordre p existe si et seulement si $\int_a^{+\infty} x^p f(x)dx$ est une intégrale généralisée convergente, ce qui équivaut à la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1-p}}$. Or cette dernière intégrale est convergente pour $p < \alpha$.
3. Si $\alpha > 1$, $\mathbb{E}(X) = \frac{a\alpha}{\alpha-1}$ et si $\alpha > 2$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{a^2\alpha}{\alpha-2}$ et on déduit que $VAR(X) = \frac{\alpha a^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$.

Exercice 2 Enoncé p. 2

Soit h une fonction mesurable positive, comme $x^+ = \sup(0, x)$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X^+)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x^+)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} h(0)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx + \int_{0}^{+\infty} h(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \frac{1}{2}h(0) + \int_{0}^{+\infty} h(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\frac{1}{2}d\delta_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)d\mu_1(x) \ ,
\end{aligned}$$

où l'on a noté μ_1 la mesure sur $\mathbb{R}$ de densité $f_1(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$. Ainsi la loi de la variable aléatoire X^+ est $\mathbb{P}_{X^+} = \frac{1}{2}\delta_0 + \mu_1$.

Exercice 3 Enoncé p. 2

On commence par montrer que f est intégrable. Pour cela on remarque que pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $y \geqslant 0$, $|f(x, y)| \leqslant e^{-y}$. Ainsi

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^1 |f(x, y)|dx \right) dy \leqslant \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 e^{-y}dx \right) dy = 1 < +\infty$$

donc f est intégrable. On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$I = \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 f(x, y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\infty} f(x, y)dy \right) dx \ .$$

Après quelques calculs, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} \sin^2(y) dy = \frac{1}{4} \ln 5 \ .$$

Exercice 4 Enoncé p. 2

Comme la fonctin sous le signe "intégrale-double" est positive sur $[0; +\infty[^2$, on peut utiliser le théorème de Tonelli. D'une part nous avons

$$\begin{aligned}
a &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+y} \left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2y} \right) dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+y} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{y}dx}{1+(x\sqrt{y})^2} \right) dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} \Big[\arctan(\sqrt{y}x) \Big]_{x=0}^{x=+\infty} dy \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} dy \qquad \text{en posant } u = \sqrt{y} \text{ on obtient :} \\
&= \pi \int_0^\infty \frac{1}{1+u} du \\
&= \pi^2/2 \ .
\end{aligned}$$

D'autre part, en décomposant la fraction rationnelle en élements simples (en la variable y) on obtient que :

$$\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2} \right) ,$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
a &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1-x^2} \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1-x^2} \left[\ln \left(\frac{1+y}{1+yx^2} \right) \right]_{y=0}^{y=+\infty} dx \\
&= 2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1} dx \ ,
\end{aligned}$$

puisque cette dernière intégrale généralisée est convergente (car $\frac{\ln x}{x^2-1} \sim_0 -\ln x$ et au voisinage de l'infini, $\frac{\ln x}{x^2-1} \leqslant x^{-3/2}$). On en déduit la valeur de l'intégrale cherchée est $\pi^2/4$.

Exercice 5 Enoncé p. 2

1. Pour tout t tel que $|t| < \lambda$ on a

$$\frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{1}{1 - it/\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (it/\lambda)^k.$$

2. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On a $\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$. Une fonction développable en série entière à l'origine a un développement de la forme

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_X^{(k)}(0)}{k!} t^k \ .$$

On en déduit que $\Phi_X^{(k)}(0) = k!(i/\lambda)^k$ et comme la fonction caractéristique de X est dérivable $2p$ fois à l'origine, X a des moments d'ordre $k \leqslant 2p$ donnés par $\mathbb{E}(X^k) = i^k \varphi_X^{(k)}(0)$. On en déduit finalement que $\mathbb{E}(X^k) = k!/\lambda^k$.